

Termin: 9h

Grupa D

1. Dokazati matematičkom indukcijom:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \dots + \frac{2^n}{1+a^{2^n}} = \frac{1}{a-1} + \frac{2^{n+1}}{1-a^{2^{n+1}}} \quad (a > 0, n \in \mathbb{N}).$$

2. Izračunati limes bez upotrebe L'Hopitalovog pravila: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}$.

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$.

4. Izračunati integral: $\int \ln(x^2 + 2x + 5) dx$.

Grupa E

1. Dokazati matematičkom indukcijom da je izraz $4^n + 15n - 1$ djeljiv sa 9.

2. Izračunati pomoću L'Hopitalovog pravila a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 2x - 3}$.

4. Izračunati integral: $\int \frac{dx}{2 \cos^2 x + 6 \sin 2x - 4 \sin^2 x + 1}$.

Grupa F

1. Dokazati matematičkom indukcijom:

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

2. Izračunati limes bez upotrebe L'Hopitalovog pravila:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 1} \right)^{\frac{5x^2 + 3}{3x - 1}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt[3]{1 - x^3} \right)$.

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = xe^{\frac{1}{2-x}}$.

4. Izračunati integral: $\int (5x+6)\sqrt{x^2+2x+3} dx$.

Termin: 12 h

Grupa A

1. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Riješiti matričnu jednačinu

$$X = (A + BX^{-1})^{-1}.$$

2. Izračunati bez Lopitalovog pravila: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 - x^3} - x^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije: $y = \frac{x}{\ln^2 x}$.

4. Izračunati integral: $\int \frac{\sin x + 1}{5 \sin x + 2 \cos x + 3} dx$.

Grupa B

1. Naći sve kompleksne brojeve koji zadovoljavaju jednakost $z^4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^5 - i$ i za koje je

$$\operatorname{Re} z > 0, \text{ a } \operatorname{Im} z < 0.$$

2. Naći jednačinu tangente i normale u tački $T(0,0)$ na graf funkcije $y = y(x)$ zadane implicitno jednačinom $ye^y + x + x^2 + y = 0$.

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije: $y = \frac{e^{x+3}}{x+2}$.

4. Izračunati integral: $\int x \ln(x^2 + x + 1) dx$.

Grupa C

1. U zavisnosti od realnog parametra λ diskutovati rješenja sistema i riješiti sistem jednačina:

$$x + 2y + \lambda z = 1$$

$$x + 3y = 1$$

$$2x + \lambda y + 5z = \lambda + 1$$

2. Odrediti parametre a i b tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sin ax}{x}, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2x}, & x > 0 \end{cases}$ bude neprekidna.

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

4. Izračunati integral: $\int \sin^2(9x) \cos^2(5x) \cos x dx$.